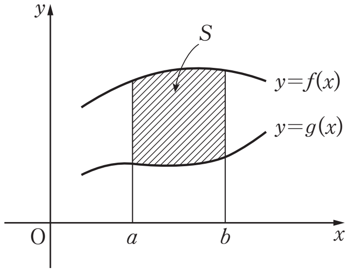
第 33 講　微分法・積分法(6)

【基礎確認事項】

［１］　２曲線の間の面積

$a<b$ とし，２つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および２直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる面積 S を定積分で表す．

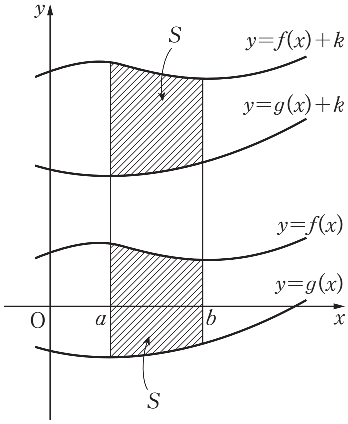
まず区間 $a\leqq x\leqq b$ で $f(x)\geqq g(x)\geqq 0$ のときは，求める面積 S は，$a\leqq x\leqq b$ における $y=f(x)$ と x 軸の間の面積から，$y=g(x)$ と x 軸の間の面積を減じたものとして求められるから



$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$

と表される．

また，区間 $a\leqq x\leqq b$ で $f(x)\geqq g(x)$ であるが，$g(x)$ や $f(x)$ が負の値をとることがあるときは，この区間で常に $g(x)+k\geqq 0$ となるような正の数 k をとる．$f(x)$，$g(x)$ を y 軸方向に k だけ平行移動しても求める図形の面積は変化しないので



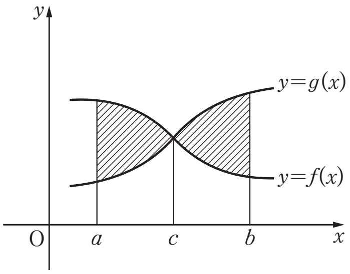
$$S=\int_a^b\{(f(x)+k)-(g(x)+k)\}dx=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$

と表される．

さらに，区間 $a\leqq x\leqq c$ で $f(x)\geqq g(x)$，区間 $c\leqq x\leqq b$ で $f(x)\leqq g(x)$ のときは

$$S=\int_a^c\{f(x)-g(x)\}dx+\int_c^b\{g(x)-f(x)\}dx$$

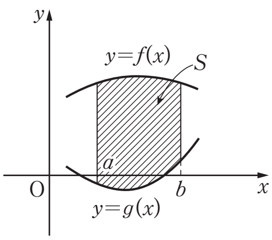
表される．



以上より，$f(x)-g(x)$ が 0 以上になる区間と負になる区間に分け，0 以上になる区間は　$f(x)-g(x)$，負になる区間は $g(x)-f(x)=-\{f(x)-g(x)\}$ を積分すればよい．

よって，　次のことがいえる．

> $a<b$ とし，２つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および２直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる面積 S は
>
> $$S=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$$



⇒　C&U 1

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　2 曲線 $y=-x^2+2x+1$，$y=x^2+4x-3$ と 2 直線 $x=-2$，$x=2$ によって囲まれる部分の面積を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 33 講　微分法・積分法(6)

1　(1)　放物線 $y=-x^2+2x+3$ と直線 $y=-2x+7$，および x 軸によって囲まれる図形の面積を求めよ．

(2)　曲線 $y=x^3-4x$ とその曲線上の点 $(1,\ -3)$ における接線とが囲む図形の面積を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　放物線　$y=-x^2+3x$　と x 軸で囲まれた図形の面積が直線 $y=ax$ で 2 等分されるとき，a の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　放物線　$y=x^2-2x-3$ と直線 $y=ax$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする．$S(a)$ の最小値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第33講　微分法・積分法(6)

(1)　2つの曲線 C_1：$y=x^2-x$，C_2：$y=x^2-3x+3$ と直線 l：$y=x-1$ によって囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である.

(2)　$m<2$ のとき，直線 $y=mx$ と曲線 $y=-x^2+2x$ によって囲まれる部分の面積は $\dfrac{1}{\boxed{\text{エ}}}(\boxed{\text{オ}}-m)^{\boxed{\text{カ}}}$ である. このとき直線 $y=mx$ が，$y=-x^2+2x$ と x 軸によって囲まれた部分の面積を2等分する m の値は　$m=\boxed{\text{キ}}-\sqrt[\boxed{\text{ク}}]{\boxed{\text{ケ}}}$ である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 33 講　微分法・積分法(6)

【CHECK & UP】

1　2 曲線の交点の x 座標は

$-x^2+2x+1=x^2+4x-3$　より　$x^2+x-2=0$　　$x=-2,\ 1$

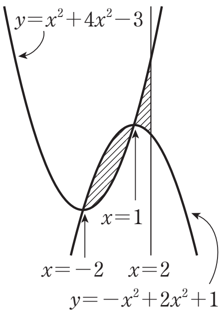
よってグラフより求める面積は

$$\int_{-2}^{1}\{(-x^2+2x+1)-(x^2+4x-3)\}dx+\int_{1}^{2}\{(x^2+4x-3)-(-x^2+2x+1)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(-2x^2-2x+4)dx+\int_{1}^{2}(2x^2+2x-4)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^{1}+\left[\frac{2}{3}x^3+x^2-4x\right]_{1}^{2}=9+\frac{11}{3}=\mathbf{\frac{38}{3}}$$

複数のグラフが絡む面積においては，その上限関係と積分する範囲に注意すること.



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 33 講　微分法・積分法(6)

1　(1)　放物線 $y=-x^2+2x+3$ と直線 $y=-2x+7$，および x 軸によって囲まれる図形の面積を求めよ．

(2)　曲線 $y=x^3-4x$ とその曲線上の点 $(1,\ -3)$ における接線とが囲む図形の面積を求めよ．

(1)　$y=-x^2+2x+3=-(x+1)(x-3)$

$y=-x^2+2x+3$ と $y=-2x+7$　より

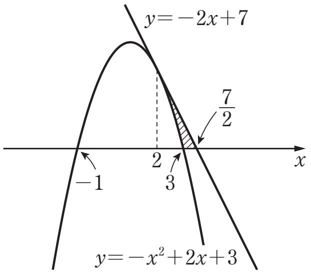
$-x^2+2x+3=-2x+7$　　$(x-2)^2=0$　　$x=2$

よって求める面積は

$$\int_2^3\{(-2x+7)-(-x^2+2x+3)\}dx+\int_3^{\frac{7}{2}}(-2x+7)dx$$

$$=\int_2^3(x-2)^2dx+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot1$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_2^3+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{7}{12}}$$



(2)　$y=x^3-4x$　より　$y'=3x^2-4$

$(1,\ -3)$ における接線は　$y=-(x-1)-3$　つまり　$y=-x-2$

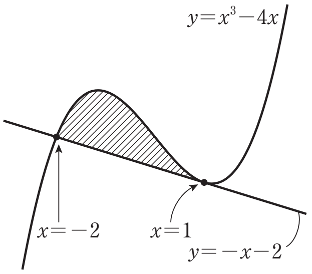
$y=x^3-4x$ と $y=-x-2$ より

$x^3-3x+2=0$　　$(x-1)^2(x+2)=0$　　$x=1,\ -2$

求める面積は

$$\int_{-2}^1\{(x^3-4x)-(-x-2)\}dx=\int_{-2}^1(x^3-3x+2)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^1=\boldsymbol{\frac{27}{4}}$$

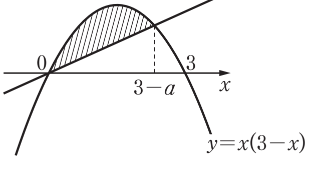


2　放物線　$y=-x^2+3x$　と x 軸で囲まれた図形の面積が直線 $y=ax$ で 2 等分されるとき，a の値を求めよ．

$y=x(3-x)=-x^2+3x$　と　$y=ax$ より

$x^2+(a-3)x=0$　　$x(x+a-3)=0$　　$x=0,\ 3-a$

よって，$y=x(3-x)$ と $y=ax$ で囲まれた図形の面積 $S(a)$ は



$$S(a)=\int_0^{3-a}\{x(3-x)-ax\}dx$$

$$=-\int_0^{3-a}x(x+a-3)dx=\frac{1}{6}(3-a)^3$$

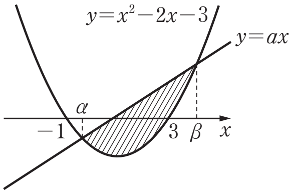
題意より　$S(a)=S(0)\times\frac{1}{2}$　　つまり　$\frac{1}{6}(3-a)^3=\frac{1}{6}\cdot3^3\times\frac{1}{2}$

$(3-a)^3=\frac{27}{2}$　　$3-a=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$　　よって　$\boldsymbol{a=3-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 放物線　$y=x^2-2x-3$ と直線 $y=ax$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする．$S(a)$ の最小値を求めよ．



$y=x^2-2x-3$ と $y=ax$　より　$x^2-2x-3=ax$

$x^2-(a+2)x-3=0$　この2解を α，β（$\alpha<\beta$）とおくと，

解と係数の関係より　$\alpha+\beta=a+2$　　$\alpha\beta=\mathbf{-3}$

$$S(a)=\int_\alpha^\beta\{ax-(x^2-2x-3)\}dx=\int_\alpha^\beta\{-x^2+(a+2)x+3\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}\{(a+2)^2+12\}^{\frac{3}{2}}$$

よって求める $S(a)$ の最小値は　$S(-2)=\dfrac{1}{6}\cdot 12^{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{6}\sqrt{12}^{\,3}=\mathbf{4\sqrt{3}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 33 講　微分法・積分法(6)

(1)　2 つの曲線 C_1：$y=x^2-x$，C_2：$y=x^2-3x+3$ と直線 l：$y=x-1$ によって囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}$ である．

(2)　$m<2$ のとき，直線 $y=mx$ と曲線 $y=-x^2+2x$ によって囲まれる部分の面積は $\dfrac{1}{\boxed{エ}}(\boxed{オ}-m)^{\boxed{カ}}$ である．このとき直線 $y=mx$ が，$y=-x^2+2x$ と x 軸によって囲まれた部分の面積を 2 等分する m の値は　$m=\boxed{キ}-\sqrt[\boxed{ク}]{\boxed{ケ}}$ である．

(1)　C_1 と C_2 の共有点の x 座標は　$x^2-x=x^2-3x+3$　より　$x=\dfrac{3}{2}$

C_1 と l の共有点の x 座標は　$x^2-x=x-1$　より　$x^2-2x+1=0$　　$(x-1)^2=0$

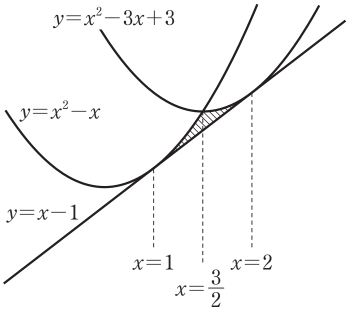
よって　$x=1$

C_2 と l の共有点の x 座標は　$x^2-3x+3=x-1$　より　$x^2-4x+4=0$　　$(x-2)^2=0$

よって　$x=2$

したがって　C_1 と l，C_2 と l はそれぞれ接する．

よって　求める面積は



$$\int_1^{\frac{3}{2}}\{(x^2-x)-(x-1)\}dx+\int_{\frac{3}{2}}^2\{(x^2-3x+3)-(x-1)\}dx$$

$$=\int_1^{\frac{3}{2}}(x-1)^2dx+\int_{\frac{3}{2}}^2(x-2)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{\frac{3}{2}}^2$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3-0+0-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{24}+\frac{1}{24}=\mathbf{\frac{1}{12}}$$

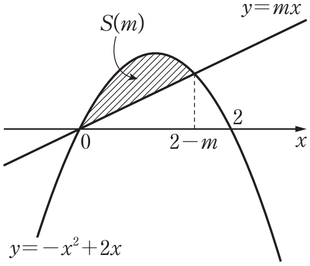
(2)　$y=mx$ と $y=-x^2+2x$ より　$x^2+(m-2)x=0$　　　$x=0,\ 2-m$

よって　直線 $y=mx$ と曲線 $y=-x^2+2x$ によって囲まれる部分の面積は

$$S(m)=\int_0^{2-m}\{(-x^2+2x)-mx\}dx=-\int_0^{2-m}x\{x-(2-m)\}dx=\mathbf{\frac{1}{6}}(\mathbf{2}-m)^{\mathbf{3}}$$

$S(m)=\dfrac{1}{2}\times S(0)$　より　$\dfrac{1}{6}(2-m)^3=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}$

$(2-m)^3=4$　　$2-m=\sqrt[3]{4}$　　よって　$m=\mathbf{2}-\sqrt[\mathbf{3}]{\mathbf{4}}$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。